Chapitre 7 : Matrices symétriques

7.1 Diagonalisation et théorème spectral

Rappels

1. Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. S'il existe des matrices $P \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ inversible et $D \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ diagonale telles que

$$A = PDP^{-1}, \qquad D = P^{-1}AP$$

alors A est semblable à une matrice diagonale et on dit que A est *diagonalisable*.

2. La matrice A est diagonalisable si et seulement s'il existe n vecteurs propres de A linéairement indépendants.
Soient $\{\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n}\}$ les n vecteurs propres linéairement indépendants. On a

$$P = (\vec{v_1} \ldots \vec{v_n}) \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

avec $A\vec{v_i} = \lambda_i \vec{v_i}$, où les λ_i sont les valeurs propres de A.
Si A est diagonalisable, $(\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n})$ est une base de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de A.

3. Le polynôme caractéristique $p_A(\lambda)$ est défini par

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n).$$

$p_A(\lambda)$ est de degré n et admet n racines, pas nécessairement toutes réelles et pas forcément toutes distinctes. Les racines sont les valeurs propres de A. On peut factoriser

$$p_A(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)\cdots(\lambda - \lambda_n)$$

où les $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de A. On a

$$\mathrm{Tr}(A) = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n \qquad \text{et} \qquad \det(\mathrm{A}) = \lambda_1 \cdots \lambda_n.$$

Exemple $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, $A^T = A$ donc A symétrique

- trouver les valeurs et vecteurs propres et les matrices P, P^{-1} et D.

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$ avec vecteurs propres $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On observe que : $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$, $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 = 0$, $\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = 0$

Donc $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ forment une base orthogonale de vecteurs propres A.

Si on normalise, on obtient $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} & 0 \end{pmatrix}$

P est une matrice orthogonale, donc

$P^{-1} = P^T$ et $A = PDP^{-1}$ devient

$A = PDP^T$

Définition 70 (diagonalisable en base orthonormée).
Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ une matrice. On dit que A est *diagonalisable en base orthonormée* s'il existe P orthogonale et D diagonale telles que $A = PDP^T$.

Si A est diagonalisable en base orthonormale, alors on a

$$A = PDP^T$$

$$A^T = (PDP^T)^T = (P^T)^T D^T P^T = PDP^T = A$$

Donc A est forcément symétrique

De plus, on remarque que

- $P^{-1} = P^T$ et $PP^T = I_n = P^TP$

les vecteurs colonnes de P sont deux à deux orthogonaux. // une matrice non symétrique n'est pas diag. en base orth. mais elle peut-être diag.

Théorème 72. *Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Alors deux vecteurs propres appartenant à des espaces propres distincts sont orthogonaux.*

Preuve Soient $\vec{v_1}, \vec{v_2} \in \mathbb{R}^n$ avec $A\vec{v_1} = \lambda_1 \vec{v_1}$ $(*)$

$A\vec{v_2} = \lambda_2 \vec{v_2}$ $(**)$

où $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

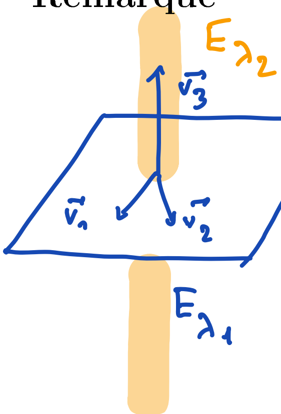
$$\lambda_1(\vec{v_1}\cdot\vec{v_2}) = (\lambda_1\vec{v_1})\cdot\vec{v_2} \overset{(*)}{=} A\vec{v_1}\cdot\vec{v_2} \overset{\text{prod. matr.}}{=} (A\vec{v_1})^T\vec{v_2}$$

$$= \vec{v_1}^T A^T \vec{v_2} = \vec{v_1}^T A \vec{v_2} \underset{(**)}{=} \vec{v_1}^T \lambda_2 \vec{v_2}$$

$$= \lambda_2 \vec{v_1}\cdot\vec{v_2}$$

Donc $\underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} \vec{v_1}\cdot\vec{v_2} = 0$ d'où $\vec{v_1}\cdot\vec{v_2} = 0$.

Remarque Schématiquement :



$E_{\lambda_1} = \mathrm{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$

$E_{\lambda_2} = \mathrm{Span}\{\vec{v}_3\}$

$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 = 0$
$\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = 0$
(par le th. 72)

On ne sait rien sur $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$.
Si le produit $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 \neq 0$, on applique GS à $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ pour obtenir une base orthogonale de E_{λ_1}.

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. $A = A^T \Rightarrow A$ symétrique

1) $p_A(\lambda) = -(\lambda-7)^2(\lambda+2) \Rightarrow \lambda \in \{-2; 7\}$

La mult. alg. de $\lambda = 7$ est 2.

2) $E_{-2} = \mathrm{Ker}(A + 2I_3) = \{\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=\vec{v}_1}\}$

$E_7 = \mathrm{Ker}(A - 7I_3) = \mathrm{Span}\{\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=\vec{v}_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=\vec{v}_3}\}$

La mult. géom. pour $\lambda = 7$ est égale à 2 $\Rightarrow$ la matrice A est diagonalisable.

De plus on sait que $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0 = \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3$, mais $\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 \neq 0$. Cherchons une base orthogonale pour E_7:

$\vec{u}_2 = \vec{v}_2$

$\vec{u}_3 = \vec{v}_3 - \dfrac{\vec{v}_3 \cdot \vec{u}_2}{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2}\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \dfrac{1/2}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/4 \\ 1 \\ 1/4 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow (\vec{v}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de A.

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} -2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/3\sqrt{2} \\ 4/3\sqrt{2} \\ 1/3\sqrt{2} \end{pmatrix} \right)$$

base orthonormée qui fournit P et $D = \begin{pmatrix} -2 & & 0 \\ & 7 & \\ 0 & & 7 \end{pmatrix}$.

Cas particulier des matrices 2 x 2

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$, $a, b, d \in \mathbb{R}$ une matrice symétrique

$$P_A(\lambda) = (a-\lambda)(d-\lambda) - b^2 = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - b^2$$

$P_A(\lambda) = 0$: formule de Viète :

$$\Delta = (a+d)^2 - 4(ad - b^2) = 4b^2 + (a-d)^2 \geq 0$$

Il y a des racines réelles (distinctes ou non)

- Si $\Delta > 0$, A est diagonalisable (en base orth.)
- Si $\Delta = 0$, alors $b^2 = 0$ et $(a-d)^2 = 0$

$$\Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \text{ est diagonale.}$$

Théorème 73. *Une matrice $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ est symétrique si et seulement si elle est diagonalisable en base orthonormale.*

$\Leftarrow$: déjà vu

$\Rightarrow$: admis sans démonstration pour $n > 2$.

Remarque : Si A n'est pas symétrique, A n'est pas diag. en base orthonormale, mais elle peut quand même être diagonalisable.

Théorème 74 (Théorème spectral des matrices symétriques). *Soit une matrice symétrique $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Alors*

1. *A admet n valeurs propres réelles pas forcément distinctes.* (comptées avec leur mult. alg.)
2. *Pour chaque valeur propre λ_i de A, on a*

   $$\text{mult géom} = \dim E_{\lambda_i} = m_i \text{ (mult. alg.)}$$

3. *A est diagonalisable en base orthonormale.*
4. *Les espaces propres sont deux à deux orthogonaux.*

Remarques

- Si 1) <u>ou</u> 2) <u>ou</u> 4) alors A n'est pas forcément symétrique
- 3) $\Leftrightarrow$ A est symétrique (th. 73)
- 2) voir le th. 53
- (2) <u>et</u> 4)) $\Leftrightarrow$ 3)

L'ensemble des valeurs propres d'une matrice A est appelé le <u>spectre</u> de A.

le th. 74 décrit les valeurs propres de A, d'où son nom.

Exemples

1) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ non symétrique

$$p_A(\lambda) = -(\lambda+1)^2(\lambda-1) \qquad \lambda \in \{\pm 1\}$$

$E_1 = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

$E_{-1} = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

on a $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

1) vrai
2) faux
3) faux
4) vrai

2) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$. A est diagonalisable, mais non en base orthogonale.

1) vrai 2) vrai 3) faux 4) faux